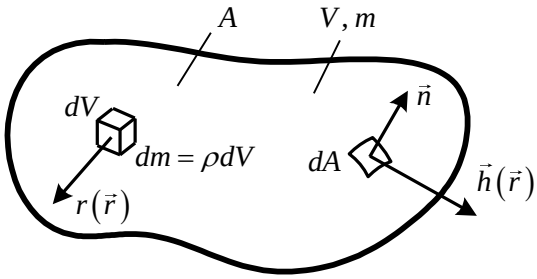
11. TERMOMECHANIKAI FELADATOK VÉGESELEM MEGOLDÁSA



A termodinamika I. főtételének integrál alakja a V térfogatú (m tömegű) és A felületű testre:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{(m)} u\,dm}_{\substack{\text{a test belső}\\ \text{energiája}}} = \underbrace{\int_{(V)} \underline{\underline{F}}\cdot\cdot\dot{\underline{\underline{A}}}\,dV}_{\substack{\text{a belső erők}\\ \text{teljesítménye}}} + \underbrace{\int_{(m)} r\,dm}_{\substack{\text{a hőforrások}\\ \text{(hő)teljesítménye}}} \underbrace{-\int_{(A)} \vec{h}\cdot d\vec{A}}_{\substack{\vec{n}\,dA\\ \text{a test (külső)}\\ \text{felületén átfolyó}\\ \text{hőáramok (hő)teljesítménye}}},$$

ahol u - egységnyi tömegben felhalmozott belső energia,

$\underline{\underline{F}}$ - a feszültségi tenzor (a testben ébredő feszültség),

$\dot{\underline{\underline{A}}}$ - a test alakváltozási tenzorának (alakváltozásának) idő szerinti első deriváltja,

r - egységnyi idő alatt egységnyi tömegben keletkezett hő (skalár mennyiség),

$\vec{h}$ - egységnyi idő alatt egységnyi felületen átáramlott hő (vektor mennyiség),

$\vec{n}$ - a test A felületének kifelé mutató normális egységvektora,

t - az idő.

Ezek a mennyiségek általában a helynek és az időnek is függvényei:

$$u = u(\vec{r},t),\quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(\vec{r},t),\quad \dot{\underline{\underline{A}}} = \dot{\underline{\underline{A}}}(\vec{r},t),\quad r = r(\vec{r},t),\quad \vec{h} = \vec{h}(\vec{r},t),\quad \vec{n} = \vec{n}(\vec{r}).$$

Továbbá: dA - az elemi felület, dV - az elemi térfogat,

dm - az elemi tömeg ($dm = \rho\, dV$, ahol ρ - az anyag tömegsűrűsége).

A termodinamika I. főtételének differenciális alakja a *Gauss-Osztrogradszkij*-tétel alkalmazásával az integrál alakból kapható, feltételezve hogy a vizsgált test tömege nem változik meg:

$$\dot{u}\rho = \underline{\underline{F}}\cdot\cdot\dot{\underline{\underline{A}}} + r\rho - \vec{h}\cdot\nabla,$$

$\dot{u}$ - a test egységnyi tömegére jutó belső energiájának (hőenergia+alakváltozási energia) idő szerinti megváltozása,

$\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\dot{\underline{\underline{A}}}$ - a testben fellépő belső erők fajlagos (egységnyi térfogatra jutó) teljesítménye.

Az I. főtételből következik, hogy a mechanikai és a hőtani állapotok nem függetlenek egymástól (csatolt vagy kapcsolt feladat).
Ha a mechanikai és hőenergia változások azonos nagyságrendűek, akkor a mechanikai és a hőtani feladatot együttesen/egyidejűleg kell megoldani, pl.: melegalakítási folyamatok.

Ha viszont az alakváltozási energia változása sokkal kisebb, mint a hőenergia változás, akkor a hőtani és mechanikai feladat szétválasztható. Ebben az esetben a mechanikai feladat megoldása csak elhanyagolható mértékben befolyásolja a hőtani feladat megoldását, azonban a hőtani feladat megoldása hatással van a mechanikai feladatra. Ezért az ilyen feladat két lépésben olható meg:

1. A (tisztán) hőtani feladat megoldása, amelynek eredménye a $T(x,y,z,t)$ hőmérsékletmező.
2. A test kezdeti hőmérséklet eloszlásához képest megváltozott $T(x,y,z,t)$ hőmérsékletmező hatására a testben hőfeszültségek / hő alakváltozások lépnek fel, amelyek a mechanikai feladat hőhatásokkal kiegészített egyenletei segítségével határozhatóak meg.

Ez a megoldás nagyon sok esetben (az esetek többségében) alkalmazható. A következőekben az 1. lépést, a hőmérsékletmező meghatározását vizsgáljuk meg részletesen.

11.1. A hőtani feladat megfogalmazása

Definíciók:

Hővezetés (kondukció): a vizsgált test anyagi részecskéi nyugalomban vannak. Pl.: szilárd halmazállapotú testek.

Hőáramlás (konvekció): a vizsgált test anyagi részecskéi nincsenek nyugalomban, a hőátadás anyagáramlással történik. Pl.: folyadékok, gázok.

A hővezetési folyamatoknál vizsgált szilárd halmazállapotú testek sokszor folyadékokkal vagy gázokkal érintkeznek, ezért a feladat peremfeltételeit ki kell egészíteni egy hőátadási/konvektív taggal.

Pl.: Egy felhevített, és lehűlésben levő test mellett áramló levegő elszállítja a hőenergiát.

Hősugárzás: a testből elektromágneses sugárzás formájában távozó hő.

A Fourier[1] *(furié)-féle hővezetési törvény:*

$$\vec{h} = -\underline{\underline{\Lambda}} \cdot (\nabla T) = -\underline{\underline{\Lambda}} \cdot \mathrm{grad}T ,$$

ahol $T = T(x, y, z, t)$ - a hőmérsékletmező,

$\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\Lambda}}(x, y, z)$ - a hővezetési tényezők tenzora. (Ha a vizsgált anyag homogén, akkor $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzor nem függ a helytől).

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$ - *Hamilton*[2] *(hemilton)*-féle differenciál operátor/nabla operátor.

Ha a vizsgált anyag a hővezetés szempontjából ortortop, és a hővezetési főirányok egybeesnek a koordinátarendszer *x*, *y* és *z* tengelyeivel, akkor

$$\left[\underline{\underline{\Lambda}}\right]_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix},$$

ahol λ_x, λ_y és λ_z az *x*, *y* és *z* irányban a hővezetési tényezők.

Ha az anyag a hővezetés szempontjából izotrop, akkor $\lambda = \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$, vagyis $\underline{\underline{\Lambda}} = \lambda \underline{\underline{E}}$.

Ebben az összefüggésben λ a hővezetési tényező, $\underline{\underline{E}}$ pedig az egységtenzor.

Tétel: a hő mindig a melegebb helyről a hidegebb helyre áramlik. (A hőtan II. főtételének következménye.)

$$\vec{h} = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\vec{e}_x - \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\vec{e}_y - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\vec{e}_z$$

Hőtani feladat: Az alakváltozási energia megváltozása sokkal kisebb mint a hőenergia megváltozása.

Ekkor a termodinamika I. főtételében eltűnik az alakváltozási energiaváltozást tartalmazó tag:

$$\underbrace{\dot{u}\rho}_{\substack{\text{egységnyi térfogat} \\ \text{belső energia} \\ \text{változása}}} = \underbrace{r\rho}_{\substack{\text{egységnyi} \\ \text{térfogat} \\ \text{hőforrása}}} - \underbrace{\vec{h} \cdot \nabla}_{\substack{\text{az egységnyi} \\ \text{térfogat felületén} \\ \text{átáramló hő}}}$$

11.2. A stacionárius hővezetési feladat megoldása

Definíció: Egy hővezetési feladat stacionárius, ha a kialakuló / meghatározandó hőmérsékletmező időben állandó.

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) francia matematikus és fizikus.
[2] William Rowan Hamilton (1805-1865) ír fizikus és matematikus.

Ha a test egyes pontjaiban nem változik a $T(x,y,z)$ hőmérséklet, akkor az egységnyi térfogatban tárolt (fajlagos) hőenergia is közel állandó marad és az I. főtételben így már csak két tag marad meg:

$$\dot{u}\rho = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\nabla\cdot\vec{h} + r\rho = 0$$

Behelyettesítve a *Fourier*-féle hővezetési törvényt:

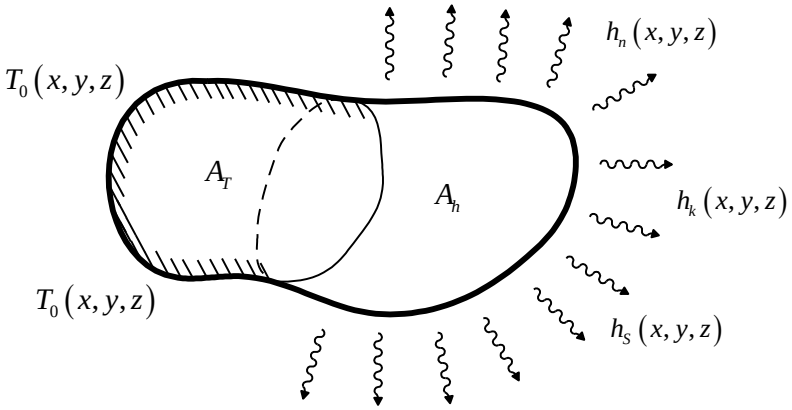
$$\nabla\cdot\vec{h} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

az I. főtételből megkapjuk a hővezetés *Fourier*-féle differenciál egyenletét stacionárius esetre:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + r\rho = 0\,.$$

Peremfeltételek:

- *Hőmérsékleti:* a test azon A_T felületén, ahol a hőmérséklet ismert
  $T(x,y,z)\big|_{A_T} = T_0(x,y,z)$ - előírt/ismert érték.
- *Hőáramlási:* a test azon A_h felületén, ahol a $\vec{h}$ hőáram-vektor (hőfluxus) ismert
  $h_n = -\vec{n}\cdot\underline{\underline{\Lambda}}\cdot(\nabla T) = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z$
  - a felületre merőleges $\vec{n}$ irányú hőáram/fluxus.



Az A_T és A_h felületekre fennállnak az $A_T \cup A_h = A$ és $A_T \cap A_h = 0$ feltételek.

Analógia a rugalmasságtani feladattal:
- a hőmérsékleti peremfeltétel $\Rightarrow$ a megtámasztás (kinematikai peremfeltétel),
- a hőáramlási peremfeltétel $\Rightarrow$ a felületi terhelés (dinamikai peremfeltétel).

- *Hőátadási/konvekciós:* a testnek azon az $A_k \subset A_h$ felületén, ahol a χ hőátadási tényező ismert
  $h_k = -\chi(T - T_k)$, ahol χ és T_k ismert/előírt mennyiség.
  T_k - környezeti hőmérséklet (hőmérséklet a testtől elég távol),
  $T = T(x,y,z)$ a keresett hőmérsékletmező.

- *Hősugárzási:* a testnek azon az $A_S \subset A_h$ felületén, ahol a κ hősugárzási tényező ismert

$$h_S = -\kappa\left(T^4 - T_k^4\right) = -\kappa\left(T^3 + T^2 T_k + T T_k^2 + T_k^3\right)(T - T_k) = -\tilde{\kappa}(T)(T - T_k),$$

ahol $\tilde{\kappa}$ és T_k ismert/előírt mennyiség (T_k - a környezet hőmérséklete) és
$T = T(x,y,z)$ a keresett hőmérsékletmező.

Analógia a rugalmasságtani feladattal:
a hőátadási és hősugárzási peremfeltétel $\Rightarrow$ a rugalmas ágyazás+terhelés.

Az egyes mennyiségek mértékegysége:

λ - hővezetési tényező $\left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\,s\,C^o}}\right] \equiv \left[\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,C^o}}\right]$,

χ - hőátadási/konvekciós tényező $\left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2\,s\,C^o}}\right] \equiv \left[\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,C^o}}\right]$,

κ - hősugárzási tényező $\left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2\,s\,C^o}}\right] \equiv \left[\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,C^o}}\right]$,

$r\rho$ - térfogati hőforrás-sűrűség $\left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3\,s}}\right] \equiv \left[\mathrm{W/m^3}\right]$,

h_n - felületi hőáramsűrűség $\left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2\,s}}\right] \equiv \left[\mathrm{W/m^2}\right]$.

A feladat variációs megfogalmazása:

A virtuális hőmérsékletek elve. (Analógia: virtuális munka elve)

$$\int_{(V)} \left(\delta \underline{\underline{D}}_T^T\right) \underline{\underline{\Lambda}}\, \underline{\underline{D}}_T dV = \int_{(V)} \delta T r \rho dV - \int_{(A_n)} \delta T h_n dA - \int_{(A_k)} \delta T \chi \left(T - T_K\right) dA - \int_{(A_S)} \delta T \kappa \left(T - T_S\right) dA,$$

ahol $\underline{\underline{D}}_T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}$, δT a hőmérsékletmező variácója, $\delta \underline{\underline{D}}_T$ pedig a hőmérsékletmező gradiensének variációja.

Az ismeretlen (keresett) a $T = T\left(x, y, z\right)$ hőmérsékletmező.

Végeselem diszkretizáció (felbontás):

A vizsgált test V térfogatát véges számú elemre bontjuk és a $T\left(x, y, z\right)$ mezőt elemenként közelítjük.

Izoparametrikus közelítés (lásd 5. fejezet): $T^e\left(\xi, \eta, \zeta\right) = \sum_{i=1}^{N} G_i^e\left(\xi, \eta, \zeta\right) T_i^e = \underbrace{\underline{\underline{A}}^e\left(\xi, \eta, \zeta\right)}_{(1\times N)} \underbrace{\underline{\underline{T}}^e}_{(N\times 1)}$

N - az elem csomópontjainak száma,

$G_i^e\left(\xi, \eta, \zeta\right)$ - approximációs függvények,

T_i^e - az e jelű elem i csomópontjában a hőmérséklet.

A szokásos eljárás után az e jelű elem végeselem egyenlete: $\underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{T}}^e = \underline{\underline{f}}^e$

Az egyenletrendszerben ismeretlenek a csomóponti hőmérsékletek: $\left(\underline{\underline{T}}^e\right)^T = \left[T_1 \;\; T_2 \;\; \cdots \;\; T_N\right]$.

Itt egy csomóponthoz egy skaláris paramétert, a csomóponti hőmérsékletet rendeljük.

Analógia a rugalmasságtani feladattal: csomóponti elmozdulás $\Rightarrow$ csomóponti hőmérséklet.

Hővezetési mátrix:

$$K_{ij}^e = \int_{(V^e)} \left[\lambda_x \frac{\partial G_i^e}{\partial x}\frac{\partial G_j^e}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial G_i^e}{\partial y}\frac{\partial G_j^e}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial G_i^e}{\partial z}\frac{\partial G_j^e}{\partial z}\right] dV + \underbrace{\underbrace{\int_{(A_k)} \chi G_i^e G_j^e dA}_{\substack{\text{a felületi} \\ \text{hőátadásból} \\ \text{származó}}} + \underbrace{\int_{(A_S)} \kappa G_i^e G_j^e dA}_{\substack{\text{a felületi} \\ \text{hősugárzásból} \\ \text{származó}}}}_{\substack{\text{hővezetési mátrix rész} \\ \text{Analógia: rugalmas ágyazás}}} .$$

Analógia: merevségi mátrix

Csomóponti hőáramvektor:

$$f_i^e = \underbrace{\int_{(V^e)} G_i r \rho \, dV}_{\substack{\text{hőforrásból/hőnyelésből} \\ \text{származó csomóponti} \\ \text{hőáramvektor}}} + \underbrace{\int_{(A_h)} G_i h_n \, dA}_{\substack{\text{ismert felületi} \\ \text{hőáramlásból származó} \\ \text{csomóponti hőáramvektor}}} + \underbrace{\int_{(A_k)} \chi G_i T_k \, dA}_{\substack{\text{hőátadási/konvekciós} \\ \text{csomóponti hőáram-} \\ \text{vektor}}} + \underbrace{\int_{(A_S)} \kappa G_i T_k \, dA}_{\substack{\text{hősugárzásból származó} \\ \text{csomóponti} \\ \text{hőáramvektor}}} .$$

Analógia: terhelési vektor.

Az elemek (közelítő hőmérsékletmező) összeillesztése ugyanúgy történik, mint a rugalmasságtani feladatoknál:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1,1} \underline{\underline{K}}_{11}^e & \sum_{e \in 1,2} \underline{\underline{K}}_{12}^e & \cdots & \sum_{e \in 1,j} \underline{\underline{K}}_{1j}^e & \cdots \\ \sum_{e \in 2,1} \underline{\underline{K}}_{2,1}^e & \sum_{e \in 2,2} \underline{\underline{K}}_{2,2}^e & \cdots & \sum_{e \in 2,j} \underline{\underline{K}}_{2,j}^e & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \\ \sum_{e \in i,1} \underline{\underline{K}}_{i,1}^e & \sum_{e \in i,2} \underline{\underline{K}}_{i,2}^e & \cdots & \sum_{e \in i,j} \underline{\underline{K}}_{i,j}^e & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{f}} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1} \underline{\underline{f}}_1^e \\ \sum_{e \in 1} \underline{\underline{f}}_2^e \\ \vdots \\ \sum_{e \in i} \underline{\underline{f}}_i^e \\ \vdots \end{bmatrix}$$

A stacionárius hőtani probléma végeselem alapegyenlete:

$\underline{\underline{K}} \; \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{f}}$ - lineáris algebrai egyenletrendszer a T_i csomóponti hőmérsékletekre.

$\underline{\underline{T}}^T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \ldots & T_M \end{bmatrix}$ - csomóponti hőmérsékleti vektor,

M - a feladat csomópontjainak száma.

Az egyenletrendszer a hőmérsékleti peremfeltételek figyelembevétele után a csomóponti hőmérsékletekre megoldható.

11.3. Az instacionárius hővezetési feladat megoldása

Definíció: Egy hővezetési feladat instacionárius, ha a kialakuló / meghatározandó hőmérsékletmező időben változik.

Ha a hőáramok és ezzel együtt a hőmérsékletmező időben változik, akkor figyelembe kell venni, hogy a hő egy részét az anyag tárolja (a megváltozott hőmérséklet révén). Ebből következően módosul a hővezetési differenciálegyenlet és a peremfeltételek időtől függőek lesznek.

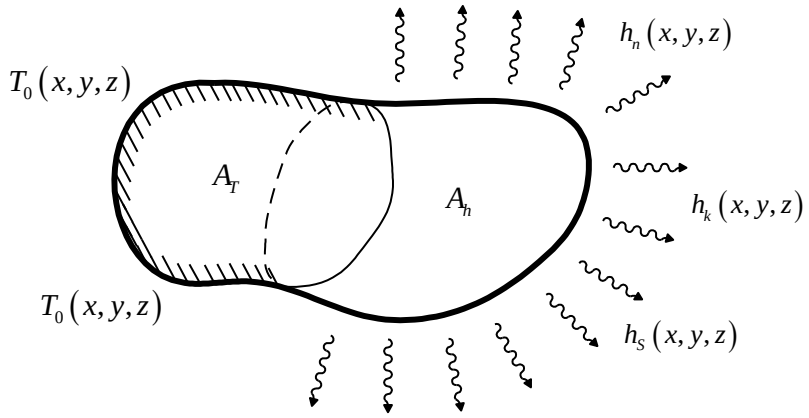
A hővezetés *Fourier*-féle differenciál egyenlete instacionárius esetre:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + r\rho = \rho \, c \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\dot{u}} ,$$

ahol ρ - tömegsűrűség $\left[\mathrm{kg/m^3}\right]$,

c - fajhő (fajlagos hőtároló képességi tényező) $\left[\dfrac{J}{\mathrm{kg\,C^o}}\right]$.

Peremfeltételek:



- az (A_T) felületen $T(x,y,z,t)=T_0(x,y,z,t)$ - ismert érték,
- az (A_h) felületen $-\underline{\underline{\Lambda}}\cdot\nabla T=h_n(x,y,z,t)$ - hőáram/fluxus (ismert érték),
- az (A_k) felületen $-\lambda(T-T_k)=h_k(x,y,z,t)$ - hőátadás,
- az (A_S) felületen $-\tilde{\kappa}(T-T_k)=h_S(x,y,z,t)$ - hősugárzás.

Kezdeti feltétel: - a $t=t_0$ időpillanatban $T(x,y,z,t_0)=\tilde{T}(x,y,z)$ - adott/ismert mező.

A feladat variációs megfogalmazása:

$$\int_{(V)}\left(\delta\underline{\underline{D}}_T^T\right)\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{D}}_T dV+\underline{\int_{(V)}\rho c\,\delta T\frac{\partial T}{\partial t}dV}=\int_{(V)}\delta T\,r\rho\,dV-\int_{(A_h)}\delta T\,h_n dA-\int_{(A_k)}\delta T\,\chi(T-T_k)dA-\int_{(A_S)}\delta T\,\tilde{\kappa}(T-T_k)dA\,.$$

Az összefüggésben az aláhúzott tag jelenti a stacionárius esettől való eltérést.

Végeselemes közelítés (elemenként): $T^e(\xi,\eta,\zeta,t)=\sum_{i=1}^{N}G_i^e(\xi,\eta,\zeta)T_i^e(t)=\underbrace{\underline{\underline{A}}^e(\xi,\eta,\zeta)}_{(1\times N)}\underbrace{\underline{\underline{T}}^e(t)}_{(N\times 1)}$.

Itt a $T_i^e(t)$ csomóponti hőmérsékletek függenek az időtől.

Az e jelű elem végeselem egyenlete: $\underline{\underline{C}}^e\dot{\underline{\underline{T}}}^e+\underline{\underline{K}}^e\underline{\underline{T}}^e+=\underline{\underline{f}}^e$.

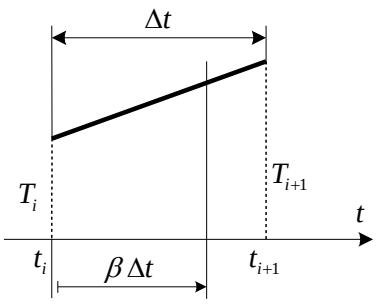
Az elem hőtárolási/hőkapacitási mátrixa: $C_{ij}^e=\int_{(V^e)}\rho c G_i^e G_j^e dV$.

Az egész rendszer hőtárolási mátrixa: $\underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix}\sum_{e\in 1,1}\underline{\underline{C}}_{11}^e & \sum_{e\in 1,2}\underline{\underline{C}}_{12}^e & \cdots & \sum_{e\in 1,j}\underline{\underline{C}}_{1j}^e & \cdots\\ \sum_{e\in 2,1}\underline{\underline{C}}_{21}^e & \sum_{e\in 2,2}\underline{\underline{C}}_{22}^e & \cdots & \sum_{e\in 2,j}\underline{\underline{C}}_{2j}^e & \cdots\\ \vdots & & & \vdots & \\ \sum_{e\in i,1}\underline{\underline{C}}_{i1}^e & \sum_{e\in i,2}\underline{\underline{C}}_{i2}^e & \cdots & \sum_{e\in i,j}\underline{\underline{C}}_{ij}^e & \cdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$.

Az instacionárius hőtani probléma végeselem alapegyenlete: $\underline{\underline{C}}\,\dot{\underline{\underline{T}}}+\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{f}}$.

Közönséges elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer a $\underline{\underline{T}}(t)$ csomóponti hőmérsékletekre nézve.

A differenciálegyenlet-rendszer időintegrálása:



Feltételezés:

A $\underline{\underline{T}}(t)$ hőmérséklet a Δt időintervallumban lineárisan változik.

Az idő a $0\le\beta\le 1$ paraméter függvénye:

$t=t(\beta)=t_i+\beta\Delta t=t_i+\beta(t_{i+1}-t_i)=(1-\beta)t_i+\beta t_{i+1}$.

A csomóponti hőmérsékletek a *t* időpillanatban: $\underline{\underline{T}}=\underline{\underline{T}}(\beta)=\underline{\underline{T}}_i+\frac{\underline{\underline{T}}_{i+1}-\underline{\underline{T}}_i}{\Delta t}\beta\Delta t=(1-\beta)\underline{\underline{T}}_i+\beta\underline{\underline{T}}_{i+1}$.

A hőáram vektor a *t* időpillanatban: $\underline{\underline{f}}=\underline{\underline{f}}(\beta)=\underline{\underline{f}}_i+\frac{\underline{\underline{f}}_{i+1}-\underline{\underline{f}}_i}{\Delta t}\beta\Delta t=(1-\beta)\underline{\underline{f}}_i+\beta\underline{\underline{f}}_{i+1}$.

A csomóponti hőmérsékletek idő szerinti differenciálhányadosát közelítőleg differenciahányadossal helyettesítjük:

$$\dot{\underline{\underline{T}}} = \frac{d\underline{\underline{T}}}{dt} \cong \frac{\underline{\underline{T}}_{i+1} - \underline{\underline{T}}_i}{\Delta t} .$$

A differenciálegyenlet-rendszer: $\underline{\underline{C}}\dot{\underline{\underline{T}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{f}}$.

Behelyettesítve a differenciálegyenlet-rendszerbe: $\underline{\underline{C}}\dfrac{\underline{\underline{T}}_{i+1} - \underline{\underline{T}}_i}{\Delta t} + \underline{\underline{K}}\left[(1-\beta)\underline{\underline{T}}_i + \beta\underline{\underline{T}}_{i+1}\right] = (1-\beta)\underline{\underline{f}}_i + \beta\underline{\underline{f}}_{i+1}$.

Átrendezve rekurziós összefüggést kapunk:

$$\underbrace{\left[\underline{\underline{C}} + \Delta t\beta\underline{\underline{K}}\right]}_{\hat{\underline{\underline{K}}}}\underline{\underline{T}}_{i+1} = \underbrace{\left[\underline{\underline{C}} - \Delta t(1-\beta)\underline{\underline{K}}\right]\underline{\underline{T}}_i + \Delta t\left[(1-\beta)\underline{\underline{f}}_i + \beta\underline{\underline{f}}_{i+1}\right]}_{\hat{\underline{\underline{f}}}_i - \text{ismert}} .$$

Ebből a lineáris algebrai egyenletrendszerből a $\underline{\underline{T}}_i$ ismeretében a $\underline{\underline{T}}_{i+1}$ csomóponti hőmérsékletek meghatározhatók.

Az integrálás indítása (kezdeti feltétel): $t = t_0$: $\underline{\underline{T}}_0 = \underline{\underline{T}}(t = t_0)$

A rekurziós összefüggés: $\hat{\underline{\underline{K}}}\,\underline{\underline{T}}_{i+1} = \hat{\underline{\underline{f}}}_i \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T}}_{i+1} = \ldots$

Az integrálás stabilitása:

$0 \le \beta < 0{,}5$ - az eljárás feltételesen stabil,

$0{,}5 \le \beta \le 1$ - az eljárás feltétel nélkül stabil,

$\beta = 0{,}5$ - trapéz formula, másodrendben pontos és feltétel nélkül stabil, ennek ellenére oszcillációk felléphetnek a megoldásban.